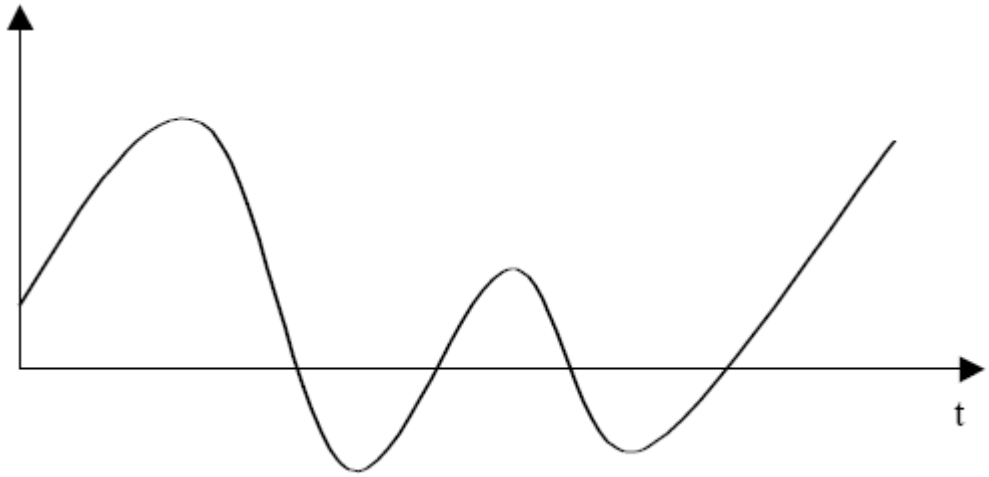
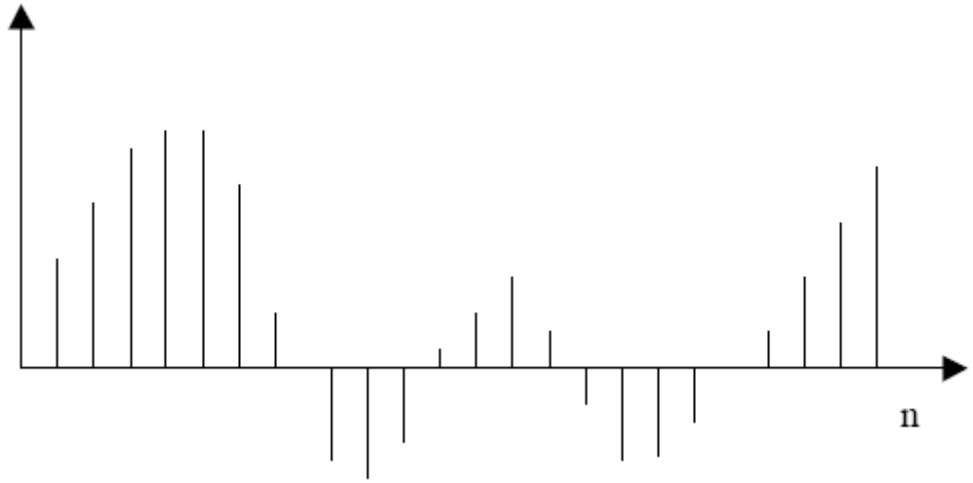
Il Campionameto dei segnali e la loro rappresentazione

Il **campionamento** consente, partendo da un segnale a tempo continuo – ovvero che fluisce con continuità nel tempo, di ottenere un segnale a tempo discreto, cioè una successione o sequenza x[n] di numeri. rappresentabile con una funzione di variabile intera relativa avente valori reali o complessi.
Campionare un generico segnale x(t) significa "estrarre" dal segnale stesso i valori che esso assume a istanti temporali equispaziati, cioè multipli di un intervallo T detto periodo di campionamento.
Con questa operazione viene a crearsi una sequenza il cui valore n-esimo x[n] è il valore assunto dal segnale a tempo continuo all'istante nT: x[n]=x(nT).
L'operazione di campionamento viene simbolicamente effettuata da un dispositivo, il campionatore, indicato con una sorta di interruttore che si chiude per un intervallo di durata infinitesima. La cadenza con cui l'interruttore si chiude è pari a: $f_c = \frac{1}{T}$ e prende il nome frequenza di campionamento (sampling frequency), misurata in Hz o in campioni/secondo. Ad esempio dato il seguente segnale analogico:



il segnale campionato sarebbe:



La **quantizzazione** è la rappresentazione dei valori numerici ottenuti dal campionamento in binario e quindi il numero di campioni è fortemente limitato dal numero di bit utilizzato per rappresentare ogni campione. Per esempio con 8 bit posso rappresentare al massimo 256 valori in generale dati n bit il numero valori rappresentabili sono 2^n.

Teorema di Shannon

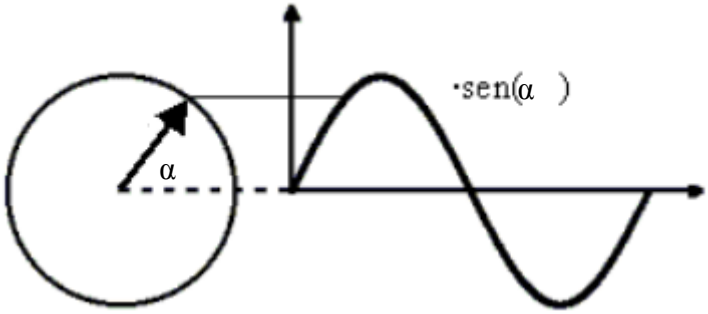
Teorema: *la frequenza di campionamento di un segnale deve essere*
$f_c \geq 2 f_{max}$ *dove* f_{max} *rappresenta la frequenza massima contenuta nel segnale, ed è anche conosciuta come frequenza di Nyquist, mentre* f_c *è la frequenza di campionamento.*

La frequenza massima di un segnale è un concetto collegato alla banda di un segnale che rappresenta per definizione l'insieme delle frequenze che rappresentano un certo segnale. Questi concetti derivano dal teorema di Fourier che afferma che qualsiasi segnale può essere rappresentato mediante una somma di sinusoidi o cosinusoidi dette armoniche di cui la prima ha la stessa frequenza del segnale e le successive si raddoppiano.

Teorema di Fourier

Segnali sinusoidali

Dalla trigonometria sappiamo che la funzione sinusoidale $y(\alpha) = sen(\alpha)$ è una funzione trigonometrica questa è una funzione periodica di periodo 2π.



Con la definizione di frequenza è possibile rappresentare la funzione seno in ambito temperole in questo modo: $y(t) = sen(2\pi \bullet f \bullet t)$ infatti per t=T risulta $y(t) = sen(2\pi \bullet f \bullet t) = sen(2\pi \bullet f \bullet \frac{1}{f})$ e cioè $sen(2\pi)$ quindi la funzione seno può essere rappresentata sia in funzione dell'angolo che del tempo. Per dare maggiore compattezza alla formula precedente viene definita una nuova grandezza detta pulsazione così definita: $\omega = 2 \bullet \pi \bullet f$ ovviamente si misura in radianti al secondo.

A questo punto possiamo rappresentare la funzione seno come $y(t) = sen(\omega \bullet t)$

Ora un segnale sinusoidale qualsiasi si differenzia dal seno per il fatto che può ovviamente avere una ampiezza diversa da 1 e una fase diversa da 0. Indicando quindi con φ_0 la fase iniziale con A_0 l'ampiezza e con ω_0 la pulsazione si ricava l'espressione generale di un segnale sinusoidale:

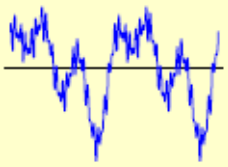
$$y(t) = A_0 sen(\omega_0 \bullet t + \varphi_0)$$

Qualsiasi posizione intermedia può allora essere vista come una composizione di una sinusoide di determinata ampiezza e di una cosinusoide generalmente di altra ampiezza

$A \cdot sen(\omega_0 t + \varphi_0) = A \cdot cos(\varphi_0) \cdot sen(\omega_0 t) + A \cdot sen(\varphi_0) \cdot cos(\omega_0 t)$

- Una funzione **periodica** può essere espressa come somma di *armoniche* di differenti frequenze e ampiezze

⇒ ***Serie di Fourier***

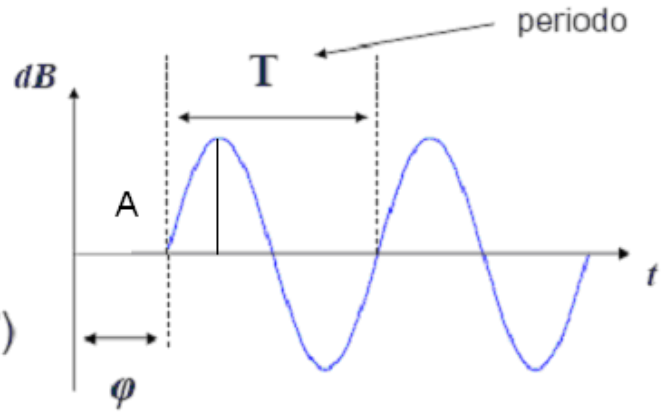


- Vale anche per funzioni **non-periodiche,** ma solo se si verificano certe *condizioni*

Jean Baptiste Joseph Fourier *(Auxerre, 1768 – Paris, 1830)*

Una funzione armonica ha la forma:

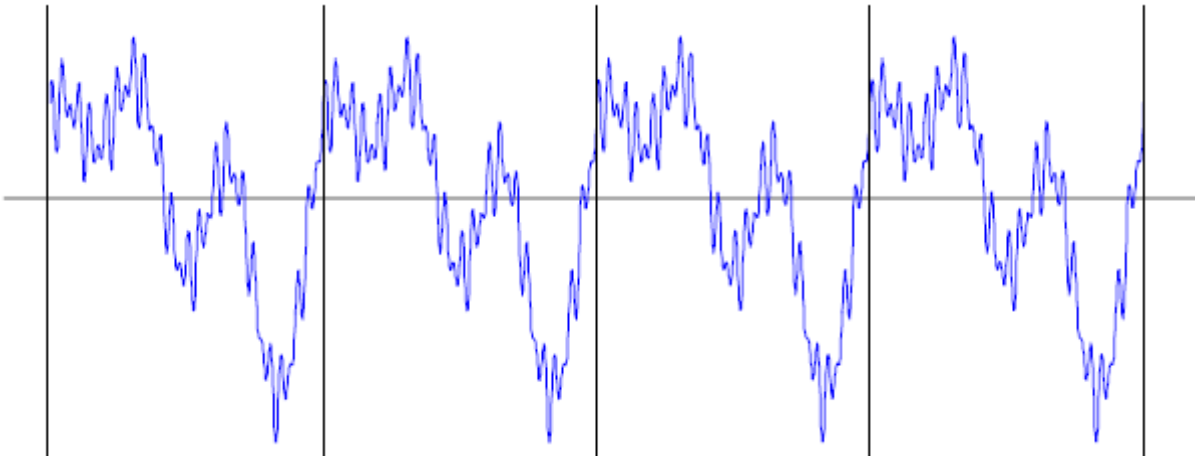
$$y = A \sin(\omega x + \varphi) \qquad y = A \cos(\omega x + \varphi)$$



Dove

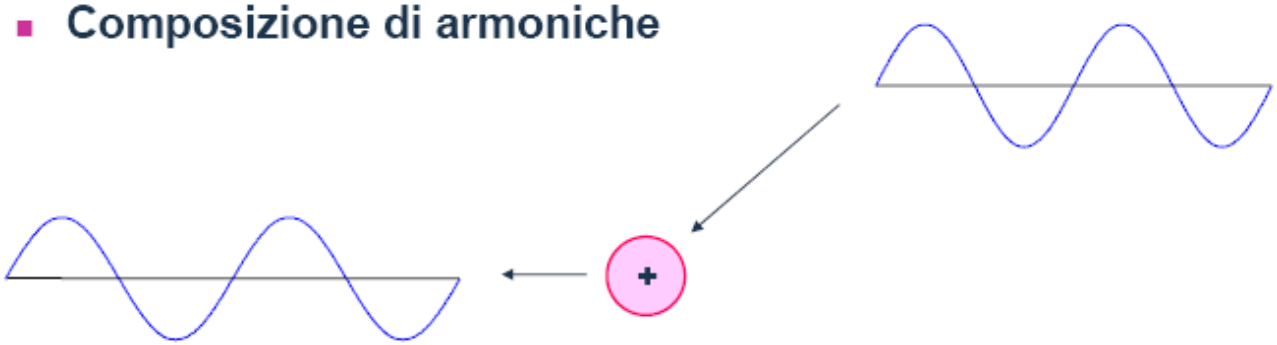
- A - ampiezza
- ω - pulsazione ($\omega = 2\pi / T$)
- φ - fase

Vediamo ora praticamente cosa significa questo teorema applicandolo al segnale precedentemente considerato. Innanzitutto notiamo che si tratta di un segnale periodico.

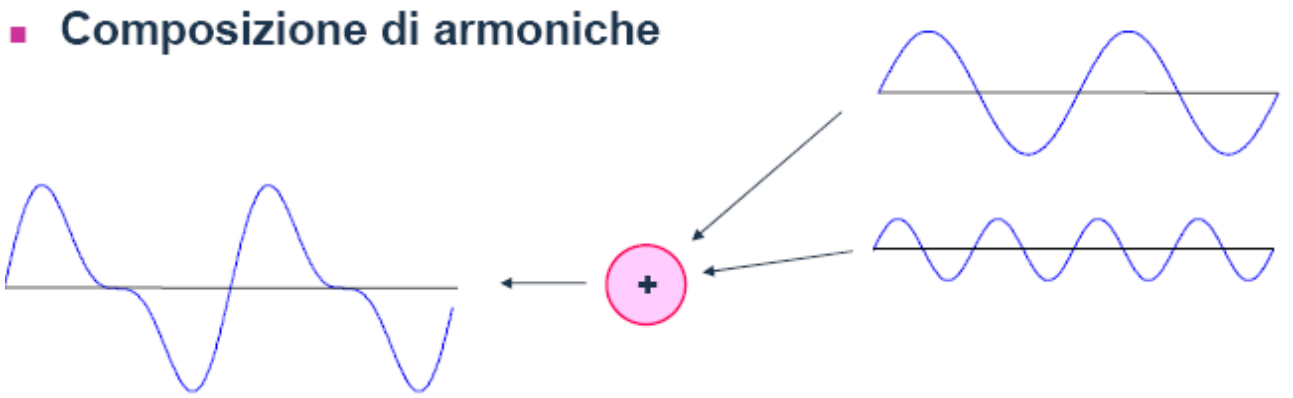


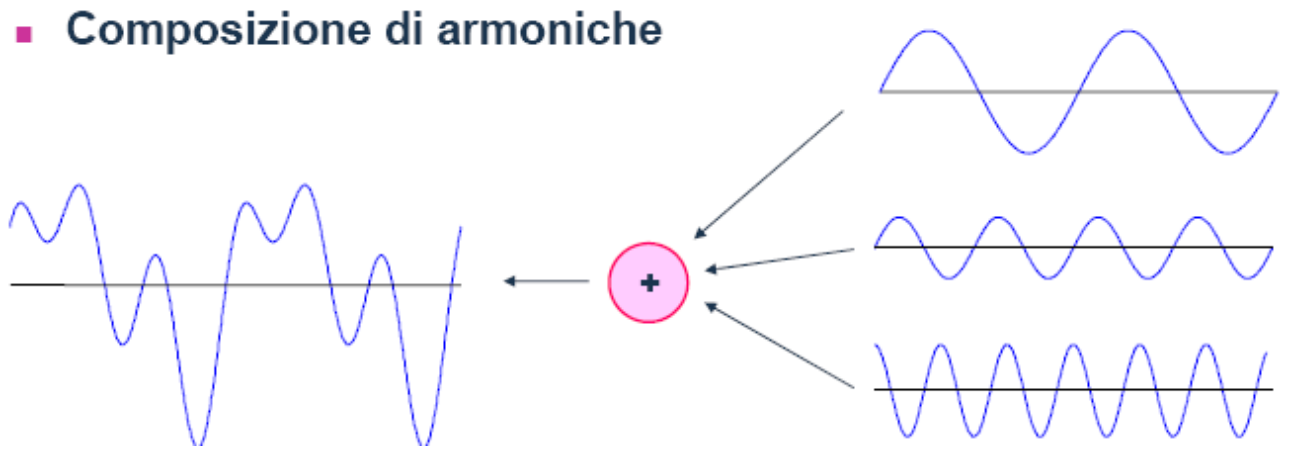
e quindi volendolo ricostruire come somma di armoniche, secondo il teorema di Fourier, la prima armonica avrà lo stesso periodo della funzione come mostrato nella figura seguente:

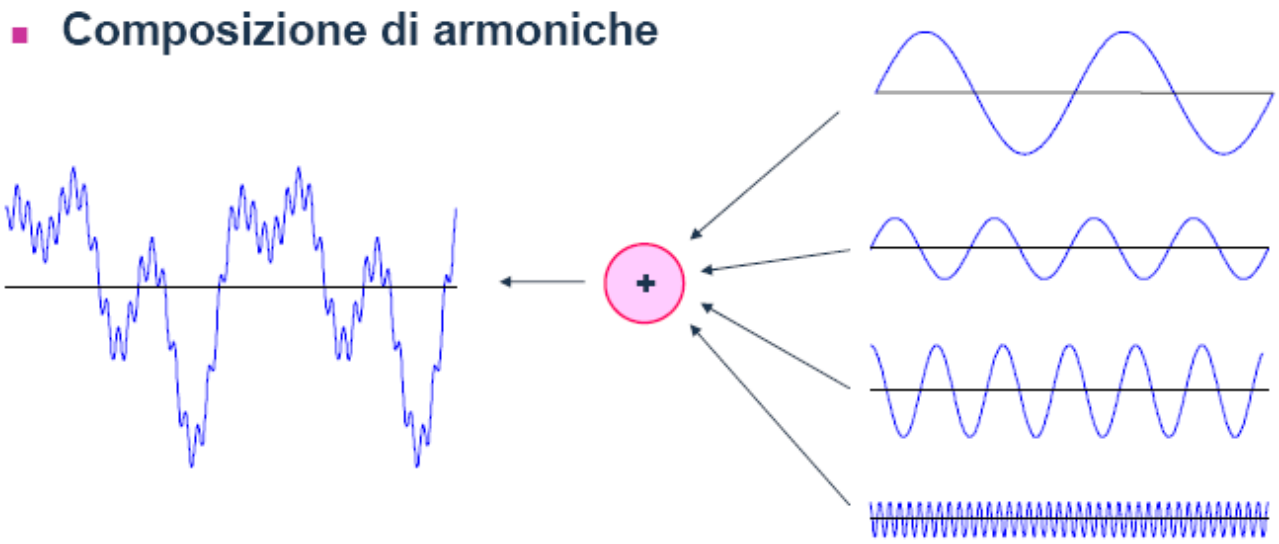
- **Composizione di armoniche**

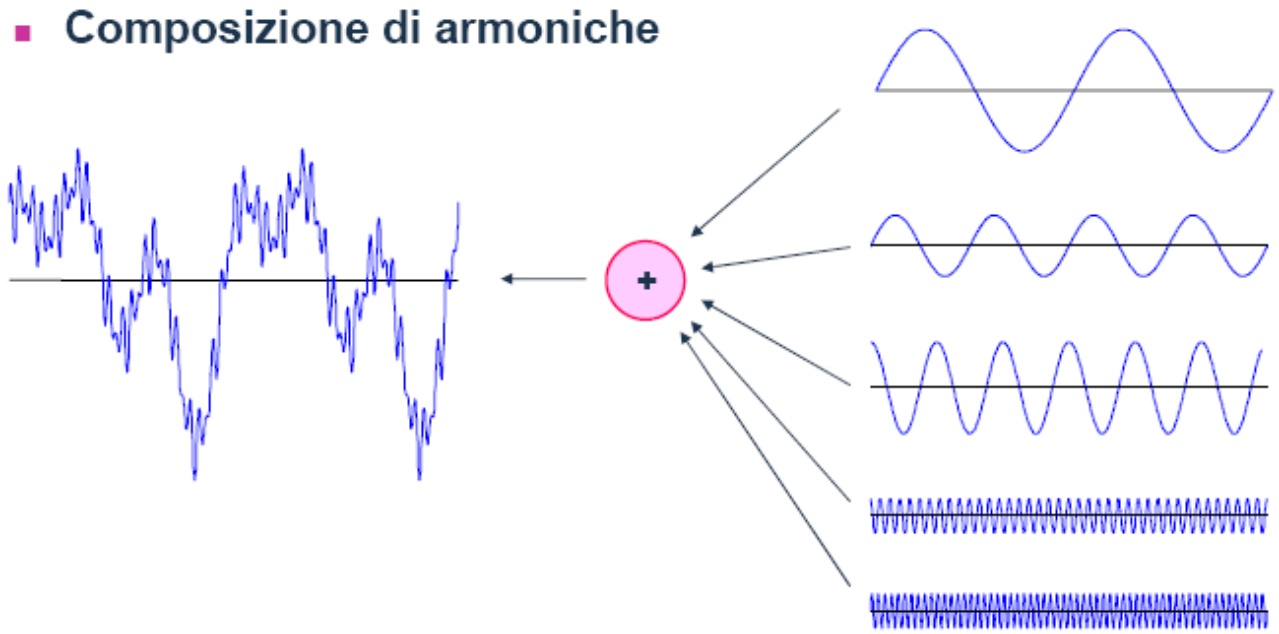


Le altre armoniche avranno un periodo che si dimezza ad ogni incremento.









Teorema di Fourier in formule:

Se x(t) è periodica, posso scriverla nella forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

,

dove

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad , \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

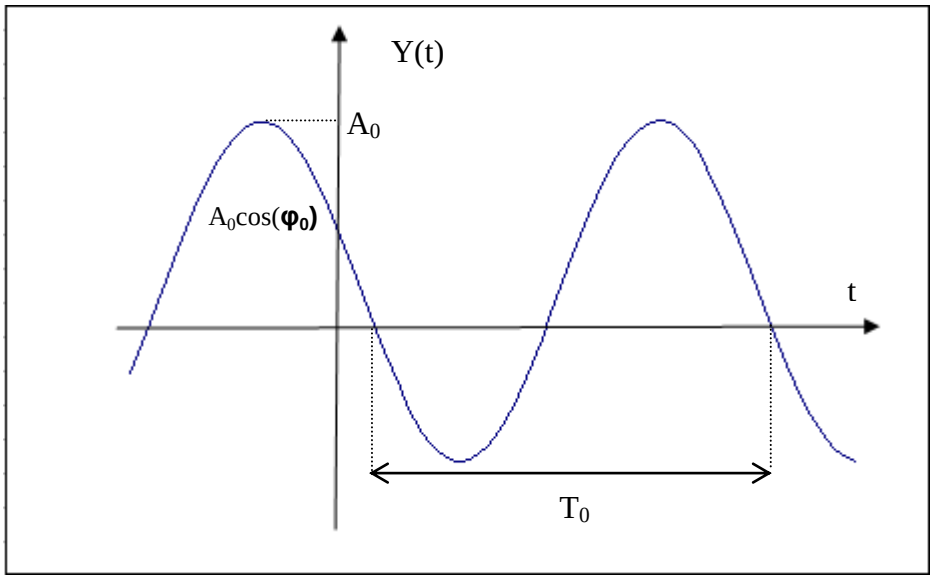
;

IL teorema di Fourier è importante perché rappresentando i sagnali non rispetto al temo ma rispetto alle frequenze si può introdurre una rappresentazione molto più semplificata del segale introducendo il concetto di spetro del segnale.

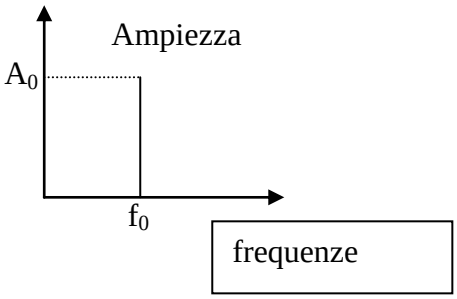
Definizione di spettro di un segnale sinusoidale

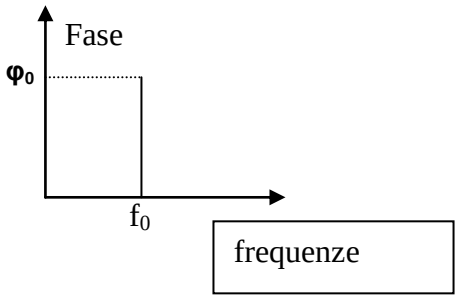
Da quanto esposto fin qui risulta del tutto evidente che un segnale sinusoidale può esser completamente descritto dalle sue tre componenti (Fase Ampiezza e frequenza) e pertanto si definisce spettro di una funzione sinusoidale una rappresentazione della funzione che prescindendo completamento dalla variabile tempo esprime le variazione del segnale mediante queste tre grandezze si hanno così due grafici detti rispettivamente spettro di ampiezza e spettro di fase entrambi rappresentati in funzioni della frequenza. Si dice anche che mediante lo spettro di una funzione si passa dal dominio del tempo a quello delle frequenze.

Esempio:



Lo stesso segnale può essere rappresentato in modo molto più semplice mediante gli spettri di ampiezza e di fase:

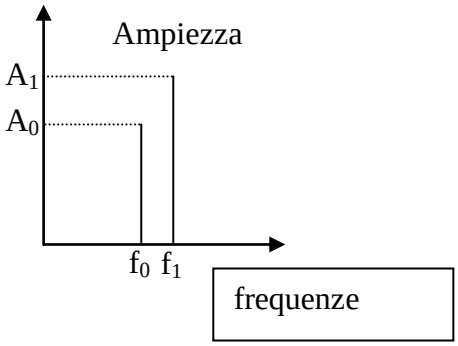


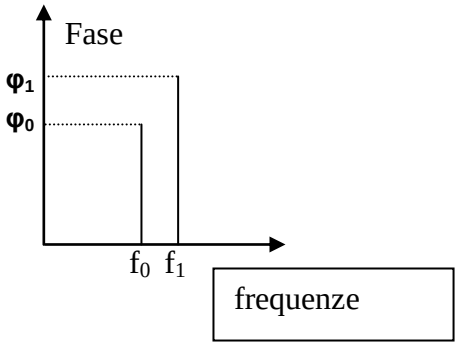


La comodità della rappresentazione spettrale è del tutto evidente nel caso di segnali complessi, cioè dati da somme di sinusoidi e questo praticamente sempre dato il teorema di fourier.

esempio

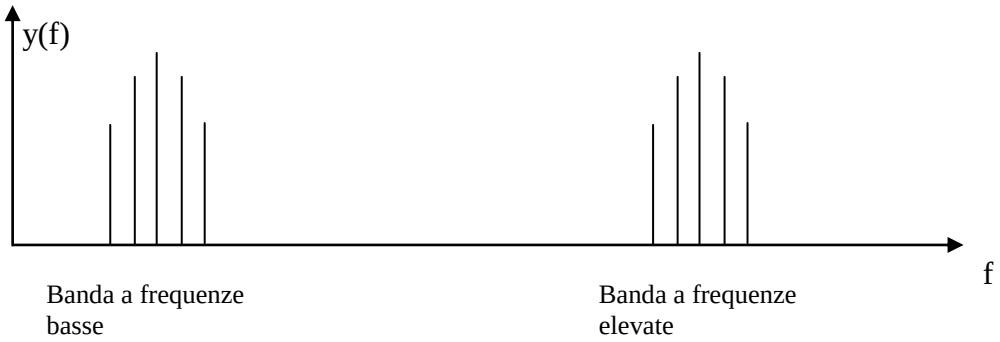
$$y(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) + A_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1)$$

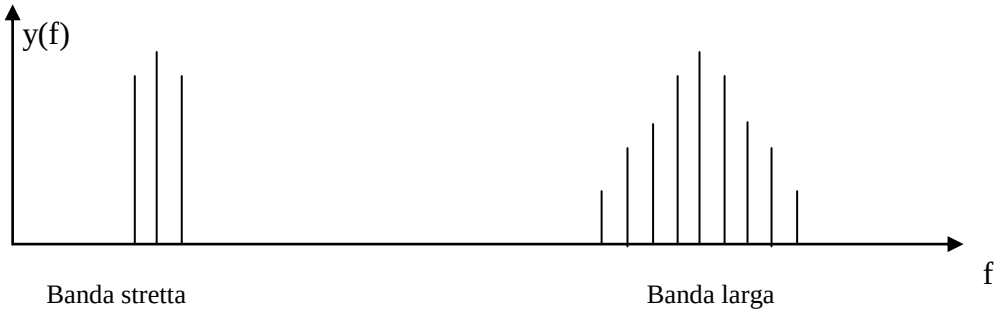




Non solo con i due grafici precedenti si ottengono le stesse informazioni dell'espressione temporale ma grazie al concetto di spettro è possibile introdurre l'importantissimo concetto di banda.

Si definisce Banda B di un segnale l'insieme delle frequenze delle sinusoidi che ne compongono lo spettro.Con questa definizione la banda di un segnale è infinita visto che le armoniche che lo compongono sono infinite, ma siccome abbiamo visto che l'ampiezza delle armoniche è inversamente proporzionale a K si ha che dopo un certo numero di armoniche il contributo dalle successive è quasi nullo e quindi è possibile approssimare la banda ad un valore finito.In ogni caso un segnale può avere una banda più o meno larga e localizzata a frequenze più o meno basse.

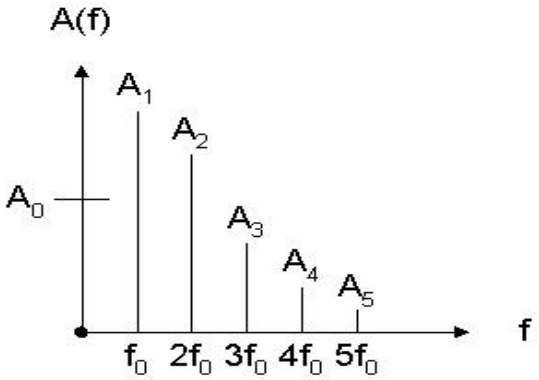




Anche il canale ha una banda ed essa si definisce come l'insieme delle frequenze che è in grado di trasportare

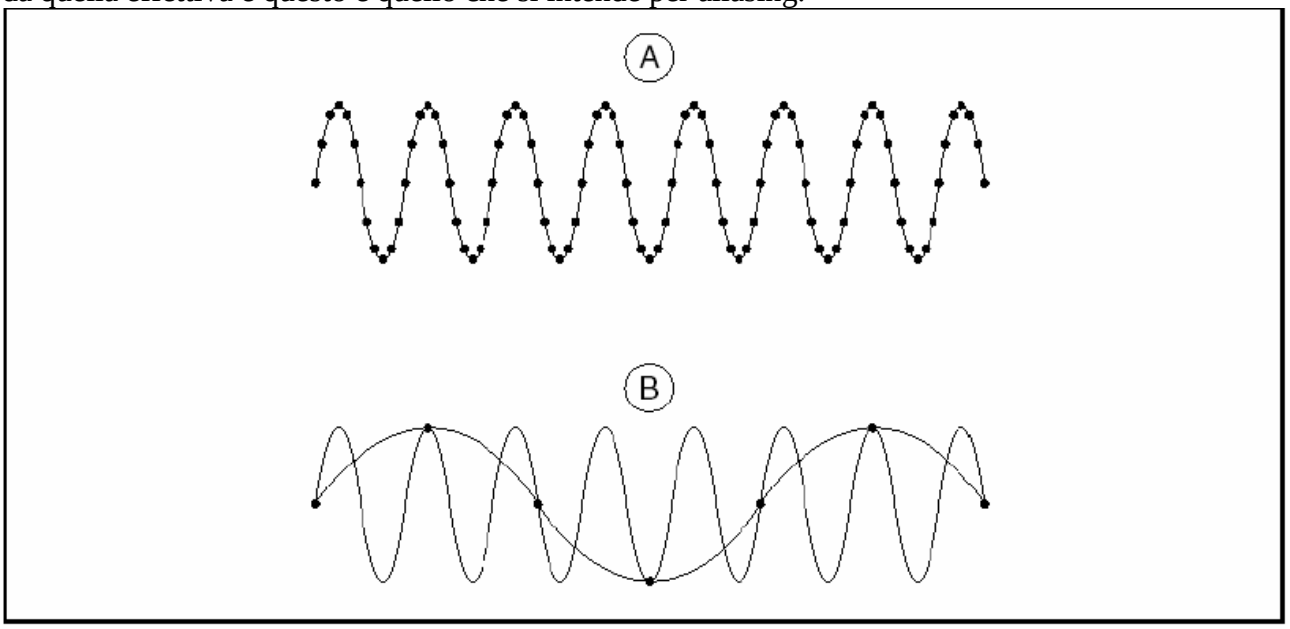
Rappresentazione nel dominio della frequenza di un segnale periodico

Grazie alla serie di Fourier una funzione periodica può essere rappresentata nel dominio della frequenza, poiché infatti le armoniche sono cosinusoidi, a ciascuna armonica corrisponde un impulso alla frequenza relativa kf0 di altezza Ak nello spettro di ampiezza e un impulso alla frequenza relativa di altezza θk nello spettro di fase. Di conseguenza questi spettri avranno l'aspetto di una serie di impulsi in generale distanziati di f0 (spettro a righe):



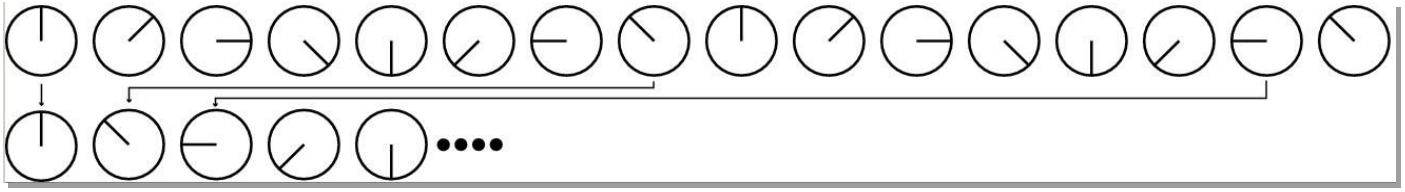
Rappresentazione nel dominio della frequenza di un segnale aperiodico
Se immaginiamo di aumentare man mano il periodo di un segnale periodico accade che la frequenza f_0 diminuisce in proporzione, la conseguenza sullo spettro è che le righe diventano sempre più vicine tra loro; al limite se il periodo tende all'infinito le righe sono talmente attaccate le une alle altre che lo spettro risulta una funzione continua.
In questo modo si può capire intuitivamente come un segnale aperiodico, che può essere concepito come segnale periodico in cui il periodo è infinito, ha una rappresentazione nel dominio della frequenza che è una funzione continua, sia nell'ampiezza che nella fase.
Tale rappresentazione (spettro di ampiezza e di fase continui) prende anche il nome di "trasformata di Fourier"
Per questo tipo di segnali ha ancora maggior significato il teorema di shannon per il fatto che lo spettro del segnale contiene non solo il segnale originario ma anche le sue infinite repliche e il campionamento deve operare in modo tale che esse siano adeguatamente distanziate per non incorrere nel fenomeno cosiddetto di ALIASING.

L'Aliasing è l'errore in cui si incorre quando si cerca di ricostruire un segnale non campionato adeguatamente.
La frequenza di campionamento determina ogni quanto ha luogo una conversione analogico-digitale (A/D). Un'elevata frequenza di campionamento acquisisce più punti in un dato intervallo di tempo e può fornire una rappresentazione migliore del segnale originale rispetto ad una bassa frequenza di campionamento. Campionare troppo lentamente può causare una rappresentazione incompleta del segnale analogico.
La figura 5 mostra un segnale campionato adeguatamente e gli effetti di un sottocampionamento.
L'effetto di un sottocampionamento è che il segnale appare come se avesse una frequenza differente da quella effettiva e questo e quello che si intende per aliasing.

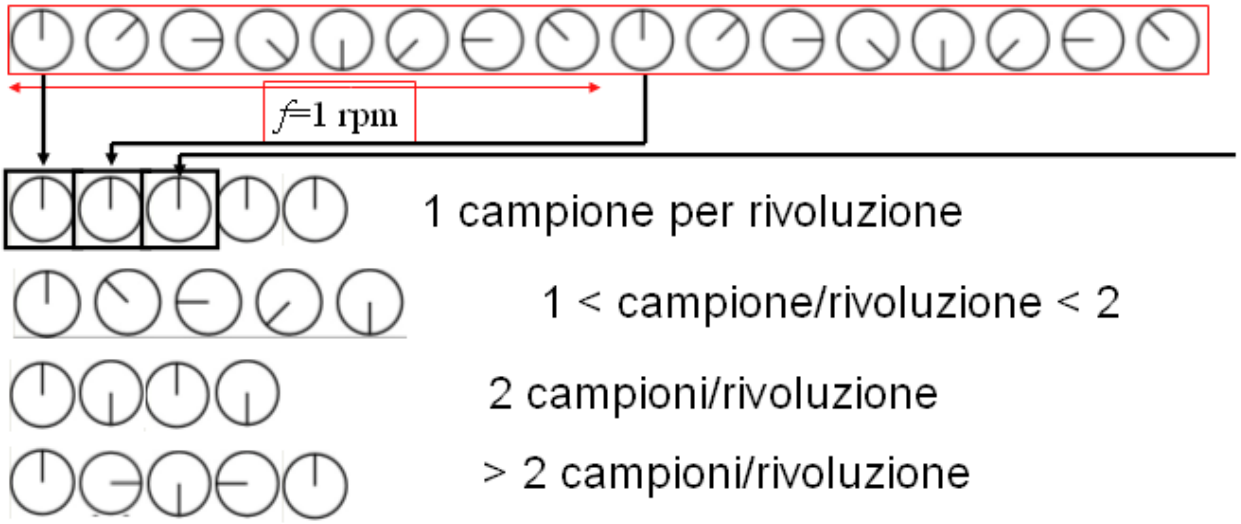


A Campionato adeguatamente B Aliasing da sottocampionamento

Questo effetto molto ben rappresentato dal cosiddetto fenomeno delle ruote che girano al contrario come mostrato dall'immagine seguente:



Rappresentazione grafica del concetto di aliasing e del teorema di shannon



se campioniamo con la stessa frequenza del segnale nel caso della ruota un campione per giro avremmo un immagine fissa o una linea retta nel caso di una sinusoide.
Se campioniamo con una frequenza maggiore di 1 ma minore di due avremmo una sovrapposizione delle immagini e addirittura vedremmo la ruota girare al contrario.